

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

дисципліна ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
(шифр і назва навчальної дисципліни)

спеціальність 123 Комп'ютерна інженерія
(шифр і назва спеціальності)

освітня програма Обслуговування комп'ютерних систем і мереж
(назва освітньої програми)

відділення Комп'ютерних технологій та систем
(назва відділення)

Розробив: Буряк Г.І.

Розглянуто та схвалено
на засіданні циклової комісії

математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії _____ Малик О.М.

Практичне заняття № 1

з навчальної дисципліни

Теорія ймовірностей

та математична статистика

Тема 1.1 Основні поняття теорії ймовірностей та комбінаторики

Основні формули комбінаторики та Біном Ньютона. Безпосереднє обчислення ймовірностей за класичним та геометричним означеннями.

Мета **Отримати практичні навички безпосереднього обчислення ймовірності за класичним та геометричним означеннями**

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i> (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи</i> (зміст завдання, послідовність їх виконання); <i>поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу</i> (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); <i>видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №1

- 1 Тема 1.1 Основні поняття теорії ймовірностей та комбінаторики.
- 2 Робоче місце лекційна аудиторія навчального закладу.
- 3 Тривалість заняття становить 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу.
- 4 Мета проведення заняття надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності.
- 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця оснащено:
- персональним комп'ютером;
 - засобами взаємодії із системою Moodle;
 - комплектом програмного забезпечення.
- 6 Правила охорони праці "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером".
- 7 Зміст і послідовність виконання завдань надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи.
- 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення:
- звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;
 - електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)».

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- основні формули комбінаторики;
- класичне означення ймовірності;
- геометричне означення ймовірності;
- призначення системи та загальні інструменти взаємодії із системою Moodle.

Вміти

- обчислювати ймовірність події за класичним означенням ймовірності;
- обчислювати ймовірність події за геометричним означенням ймовірності;
- спираючись на комбінаторні формули, обчислювати кількість елементарних наслідків.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем _____ Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії _____ математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1

Скількома способами можна розмістити 10 гостей на десяти місцях за святковим столом?

Шукане число способів дорівнює числу перестановок із десяти елементів:

$$P_n = 10! = 3628800.$$

Приклад 2

Скільки семицифрових чисел можна утворити за допомогою семи різних цифр, відмінних від 0?

Шукане число дорівнює числу перестановок з 7 різних елементів:

$$P_n = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

Приклад 3

Скількома способами можна розмістити 12 осіб за столом, біля якого поставлено 12 стільців?

Число способів дорівнює

$$P_n = 12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 12.$$

Приклад 4

Скільки можна утворити різних трицифрових додатних цілих чисел у десятковій системі числення?

З цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можна утворити A_{10}^3 трицифрових чисел, тобто $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Але з них слід виключити ті числа, які починаються з нуля. таких чисел стільки, скільки можна утворити розміщень з 9 цифр по 2 (без нуля), тобто

$$A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72.$$

Отже, різних трицифрових чисел можна утворити $720 - 72 = 648$.

Приклад 5

Скільки сигналів можна подати п'ятьма різними прапорцями, піднімаючи їх у будь-якій кількості і в довільному порядку?

Можна подати $A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 325$ сигналів.

Приклад 6

Скількома способами можна вибрати з 15 чоловік делегацію в складі 3 осіб?

Різними вважатимемо ті делегації, які відрізняються хоча б однією особою. Отже, треба обчислити

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{13! \cdot (15 - 13)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$$

Тобто є 455 різних способів обрання зазначеної делегації.

При обчисленні ймовірностей подій часто застосовується комбінаторний *принцип добутку*: якщо послідовно виконується k дій, причому першу дію можна виконати n_1 способами, другу - n_2 способами і, нарешті, k -ту дію - n_k способами, то всі k дій разом можна виконати $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

Приклад 7

Із вази з фруктами, у якій лежить 10 різних яблук і 5 різних груш, потрібно вибрати 2 яблука й 3 груші. Скількома способами можна виконати такий вибір?

Оскільки при виборі яблук чи груш порядок наступності елементів не враховується, то використовуємо комбінації (сполуки).

Вибрати 2 яблука з 10 можна C_{10}^2 способами. При кожному виборі яблук груші можна вибрати C_5^3 способами. Тоді за правилом добутку вибір потрібних фруктів можна виконати $C_{10}^2 \cdot C_5^3$. Одержуємо

$$C_{10}^2 \cdot C_5^3 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 450$$

Приклад 8

Кинуто два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що

а) сума очок, що випала гранях — парна, причому на грані хоча б одного з кубиків з'явиться шістка (подія A),

б) сума очок, що випала дорівнює 4 (подія B),

в) добуток очок буде дорівнює семи (подія C);

г) виявиться не менше 20 (подія D);

д) сума очок, що випала дорівнює п'яти, а добуток — чотирьом (подія E).

Число усіх єдиноможливих та рівноможливих наслідків — 36, оскільки простір елементарних наслідків складається з комбінацій, що наведено в таблиці

а) Число елементарних наслідків, що сприяють події A — 5, оскільки

$$\text{Отже ймовірність події: } P(A) = \frac{5}{36}$$

б) Число елементарних наслідків, що сприяють події B — 3, оскільки

Отже ймовірність події:

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

в) Число елементарних наслідків, що сприяють події C — 0, оскільки для даної події не існує сприятливих результатів. Отже ймовірність події:

$$P(C) = \frac{0}{36} = 0, \text{ тобто подія } C \text{ — неможлива.}$$

г) Число елементарних наслідків, що сприяють події D — 8, оскільки

д) Число елементарних наслідків, що сприяють події E — 2, оскільки

Отже ймовірність події:

$$P(E) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Відповідь. $P(A) = 5/36$, $P(B) = 1/12$, $P(C) = 0$, $P(D) = 2/9$, $P(E) = 1/18$.

Приклад 9

На площині накреслені два концентричні кола, радіуси яких 5 та 10 см відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у велике коло, потрапить в кільце, що утворене побудованими колами. Передбачається, що ймовірність попадання точки у плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури та не залежить від її розташування відносно великого кола.

Розв'язання

Позначимо через $A = \{\text{точка потрапить у кільце}\}$.

Площа великого кола ($mes G$): $mes G = \pi \cdot R^2 = 100\pi$

Площа кільця ($mes g$): $mes g = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$

Шукана імовірність дорівнює відношенню відповідних площ:

$$P(A) = \frac{mes g}{mes G} = \frac{75\pi}{100\pi} = 0,75$$

Відповідь. $P(A) = 0,75$.

Приклад 10

В партії з 15 ноутбуків виявилися з дефектами. Яка ймовірність того, що 2 вибрані навмання ноутбуки будуть без дефектів?

Загальна кількість елементарних наслідків випробування дорівнює числу сполучень з 15 елементів по 2

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2! \cdot 13!}$$

Кількість елементарних наслідків, що сприяють появі події A дорівнює числу сполучень з 12 елементів по 2

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$

Шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{66}{105} = \frac{22}{35}$$

Приклад 11

Керівництво фірми замовило 6 планшетних комп'ютерів та 4 графічні станції. Розподіл пристроїв між підрозділами здійснюється жеребкуванням. Яка ймовірність того, що серед чотирьох пристроїв відділ дизайну отримає 2-а планшети та 2-і графічні станції?

$A = \{\text{серед чотирьох пристроїв 2-а планшети та 2-і графічні станції}\}$

Загальна кількість рівноможливих елементарних наслідків дорівнює числу сполучень з 10 по 4.

Кількість елементарних наслідків, що сприяють появі події A

$$C_6^2 \cdot C_4^2$$

Отже, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4}$$

Приклад 12

В замовленій партії з 15 процесорів 10 виготовлено в Китаї. Знайти ймовірність того, що з 5-и взятих навмання процесорів 3-и китайського виробництва

$A = \{\text{серед 5 відібраних процесорів 3 китайського виробництва}\}$

Загальна кількість рівноможливих елементарних наслідків випробування дорівнює числу способів, якими можна вибрати 5 процесорів з 15 наявних, тобто

$$C_{15}^5$$

З 10 процесорів китайського виробництва 3 процесора можна відібрати числом сполучень

$$C_{10}^3$$

При цьому 2-а довільні процесори з 5-и процесорів можна відібрати способами

$$C_5^2$$

Отже, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^2}{C_{15}^5}$$

Приклад 13

Знайти ймовірність того, що при киданні трьох гральних кубиків шістка випаде на одному (байдуже якому) кубику, якщо на гранях двох інших кубиків випадуть числа очок, що не збігаються між собою (і не рівні шести).

$A = \{\text{шістка випаде на одному кубику, на гранях двох інших випадуть числа очок, що не збігаються між собою і не рівні шести}\}$

Загальна кількість елементарних наслідків випробування дорівнює числу сполучень з шести елементів по три

Кількість елементарних наслідків, що сприяють появі події A дорівнює числу сполучень з п'яти елементів по два

Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа елементарних наслідків, що сприяють події A , до загальної кількості можливих елементарних наслідків

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} : \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3! \cdot 3!}{6!}$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. У класі 7 учнів успішно навчаються математиці. Скількома способами можна вибрати з них двох для участі в математичній олімпіаді?
2. Учням дали список з 6 книг, що рекомендовано прочитати під час канікул. скількома способами учень може вибрати з них 6 книг?
3. У класі навчаються 16 хлопчиків і 12 дівчаток. Для прибирання території потрібно виділити 4 хлопчика та 3 дівчинки. Скількома способами можна це зробити?
4. Скількома різними способами збори, на яких присутні 40 осіб, можуть обрати з числа своїх учасників голову зборів, його заступника та секретаря?

5. З 12 членів туристичної групи потрібно вибрати трьох чергових. Скількома способами можна зробити цей вибір?

6. В одинадцятому класі 35 учнів. Вони обмінялися один з одним фотокартками. Скільки всього фотокарток було роздано?

7. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожний вчитель викладатиме у двох класах?

8. Спростити

1) $\frac{A_{12}^4 \cdot P_7}{A_{11}^9}$

2) $\frac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^3}$

3) $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$

4) $\frac{P_{12} + P_{11}}{11P_{10}}$

9. Розв'язати рівняння

1) $A_x^2 = 42$

5) $C_{27}^8 + C_{27}^7 = C_{28}^x$

2) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$

6) $A_x^2 + C_x^1 = 256$

3) $C_{23}^9 + C_{23}^x = C_{24}^9$

7) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$

4) $C_x^{x-2} = 45$

8) $A_{x+1}^2 = 156$

Практичне заняття № 2

з навчальної дисципліни

Теорія ймовірностей

та математична статистика

Тема 1.2 Основні теореми теорії ймовірностей

Застосування правил додавання та множення ймовірностей сумісних, несумісних, залежних та незалежних подій. Формули повної ймовірності, формула Байєса.

Мета **Отримати практичні навички по використанню теорем, обчисленню повної ймовірності та надійності системи**

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i> (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи</i> (зміст завдання, послідовність їх виконання); <i>поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу</i> (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); <i>видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №2

- 1 Тема 1.2 Основні теореми теорії ймовірностей.
- 2 Робоче місце лекційна аудиторія навчального закладу.
- 3 Тривалість заняття становить 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу.
- 4 Мета проведення заняття надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності.
- 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця оснащено:
- персональним комп'ютером;
 - засобами взаємодії із системою Moodle;
 - комплектом програмного забезпечення.
- 6 Правила охорони праці "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером".
- 7 Зміст і послідовність виконання завдань надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи.
- 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення:
- звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;
 - електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)».

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- основні теореми теорії ймовірностей та їх наслідки;
- класифікацію подій на сумісність, несумісність, залежність та незалежність;
- що таке гіпотеза та в який спосіб здійснюється її переоцінка;
- в який спосіб обчислюється надійність системи.

Вміти

- застосовувати теоремами та їх наслідки для обчислення ймовірності подій;
- використовувати формулу для пошуку повної ймовірності подій;
- користуватися формулою Баєса для переоцінки висунутих гіпотез.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем _____ Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії _____ математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1

Авіакомпанія протягом доби виконує 2 рейси до Одеси. Ймовірність затримки першого рейсу за мете умовами Одеси дорівнює 0,1, другого - 0,15, причому затримка одного рейсу не залежить від іншого. Знайти ймовірність затримки принаймні одного рейсу.

Розв'язання. Позначимо події

$A = \{\text{затримано принаймні один рейс}\},$

$A_1 = \{\text{затримано перший рейс}\},$

$A_2 = \{\text{затримано другий рейс}\}.$

За умовою $P(A_1) = 0,1, P(A_2) = 0,15$, тоді $P(\bar{A}_1) = 0,9, P(\bar{A}_2) = 0,85$.

1-ий спосіб.

Подія $A = A_1 + A_2$, причому події A_1 і A_2 сумісні і незалежні, тому

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,235.$$

2-ий спосіб.

Перейдемо до протилежної відносно A події $\bar{A} = \{\text{жоден рейс не затримано}\}.$

Оскільки $\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2$, то $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2)$ і

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,235.$$

Приклад 2

Із натуральних чисел 1,2,..., 9 навмання вибрано одне число, а потім із решти чисел – друге. Яка ймовірність того, що обидва рази відібрано парні числа?

Розв'язання.

Позначимо події

$B_1 = \{\text{перший раз відібрано парне число}\},$

$B_2 = \{\text{другий раз відібрано парне число}\},$

$B = \{\text{обидва рази відібрано парне число}\}.$

Тоді $B = B_1B_2$, причому B_1 і B_2 - залежні, тому

$$P(B) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}.$$

Приклад 3

Лінія зв'язку впродовж часу t забезпечує зв'язок між об'єктами з надійністю (імовірність безвідказної роботи) 0,9. Для підвищення надійності встановлено дві резервні лінії з надійностями 0,85 і 0,8. Визначити надійність зв'язку між об'єктами за час t , якщо всі лінії працюють незалежно одна від одної.

Розв'язання.

1-ий спосіб.

Позначимо події

$A = \{\text{зв'язок між об'єктами надійний}\},$

$A_1 = \{\text{перша лінія надійна}\},$

$A_2 = \{\text{друга лінія надійна}\},$

$A_3 = \{\text{третья лінія надійна}\}.$

За умовою задачі $P(A_1) = 0,9$, $P(A_2) = 0,85$, $P(A_3) = 0,9$, а за означенням суми подій $A = A_1 + A_2 + A_3$.

Оскільки події A_1, A_2, A_3 сумісні і незалежні, то за формулами маємо

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2) - P(A_1)P(A_3) - P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,997.$$

2-ий спосіб.

Перейдемо до протилежних подій

$\bar{A} = \{\text{зв'язок між об'єктами ненадійний}\},$

$\bar{A}_1 = \{\text{відмовила перша лінія}\},$

$\bar{A}_2 = \{\text{відмовила друга лінія}\},$

$\bar{A}_3 = \{\text{відмовила третя лінія}\}.$

$$\text{Тоді } \bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3,$$

$$P(\bar{A}_1) = 0,1, P(\bar{A}_2) = 0,15, P(\bar{A}_3) = 0,2.$$

Оскільки події $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ незалежні, то

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,03,$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,997.$$

Задача 4

У групі із двадцяти студентів 30% — відмінники. Для здачі заліку навмання викликано одного студента. Яка ймовірність того, що викликано відмінника?

Розв'язання.

Позначимо подію $B = \{\text{викликано відмінника}\}$.

Випробування полягає у випадковому виборі одного студента із двадцяти, тому загальна кількість наслідків $n = 20$. Оскільки за умовою в групі 6 відмінників, то кількість сприятливих щодо події A наслідків $m = 6$. За формулою $P(B) = 0,3$.

Задача 5

Із двоцифрових чисел, не більших від 20, навмання вибрано одне число q і складено рівняння $x^2 + 8x + q = 0$. Яка ймовірність того, що корені рівняння — дійсні цілі числа?

Розв'язання.

Випробування полягає у випадковому виборі одного з одинадцяти чисел, тому $n = 11$.

Позначимо подію $C = \{\text{корені дійсні цілі числа}\}$.

Рівняння має дійсні корені, коли дискримінант

$$D = 16 - q \geq 0 \text{ або } q \leq 16.$$

Із формул для коренів рівняння $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - q}$ випливає, що лише 3 числа дають цілі значення коренів.

Отже, $m = 3$, а $P(C) \approx 0,272$.

Задача 6

Кожний із чотирьох пасажирів може придбати квиток на один із семи рейсів, що виконуються впродовж дня до аеропорту N . Знайти ймовірність того, що вони придбали квитки:

- А) на перший рейс;
- Б) на один і той самий рейс;
- В) на різні рейси.

Розв'язання.

Оскільки для кожного пасажера є 7 варіантів придбання квитка, то, згідно з принципом добутку, кількість усіх наслідків випробування $n=7^4$.

А) Позначимо подію $B=\{\text{всі пасажери придбали квитки на перший рейс}\}$. Цій події сприяє лише один наслідок. Отже, $m_B = 1$, а за формулою (1) $P(B)=0,0004$.

Б) Позначимо подію $C=\{\text{усі пасажери придбали квитки на один і той самий рейс}\}$. Сприятливими щодо цієї події є 7 наслідків (за кількістю рейсів). Отже, $m_C=7$, тому $P(C)=0,0029$.

В) Позначимо подію $D=\{\text{пасажери придбали квитки на різні рейси}\}$. Кількість наслідків, сприятливих щодо цієї події, $m_D = A_7^4 = 840$, тому $P(D) = 0,35$.

Задача 7

У комплекті 9 виробів найвищої якості становлять 75 % усього комплекту. Випадковим чином відібрано 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виробів:

- а) усі найвищої якості;
- б) лише 4 найвищої якості.

Розв'язання.

Оскільки 9 виробів становлять 75 %, то всього в комплекті міститься 12 виробів, три з яких не найвищої якості. Випробування полягає у виборі шести виробів із дванадцяти. Отже, кількість усіх наслідків випробування

$$n=C_{12}^6=924.$$

а) Позначимо подію $A=\{\text{усі відібрані вироби найвищої якості}\}$. Цій події сприяють лише ті наслідки, в яких відбір шести виробів здійснюється з дев'яти найвищої якості. Отже,

$$m_A=C_9^6 = C_9^3 = 84, \text{ а } P(A)=0,09.$$

б) Позначимо подію $B=\{\text{серед відібраних лише 4 вироби найвищої якості}\}$. Сприятливими щодо цієї події є ті наслідки, в яких 4 вироби відбираються із дев'яти найвищої якості і 2 вироби із трьох не найвищої якості. За принципом добутку $m_B=C_9^4 \cdot C_3^2 = 378$, а $P(B) = 0,41$.

Задача 8

На модульній контрольній роботі студентам запропоновано 9 задач: 4 - першого рівня складності, 3 - другого і дві - третього рівня. Події $A_i = \{\text{розв'язання } i\text{-ї задачі першого рівня, } i=1, 2, 3, 4\}$, $B_j = \{\text{розв'язання } j\text{-ї задачі другого рівня, } j= 1, 2, 3\}$, $C_k = \{\text{розв'язання } k\text{-ї задачі третього рівня, } k = 1, 2\}$, $D = \{\text{одержання позитивної оцінки}\}$. Виразити подію D через події A_i , B_j , C_k , якщо для одержання позитивної оцінки необхідно розв'язати всі задачі першого рівня, принаймні дві другого рівня і принаймні одну третього рівня.

Розв'язання.

За означенням добутку подій розв'язанню всіх задач першого рівня відповідає подія $K = A_1 A_2 A_3 A_4$. Розв'язанню принаймні двох задач другого рівня відповідає подія L , яка полягає в появі однієї з несумісних подій

$$\overline{B_1} B_2 B_3, B_1 \overline{B_2} B_3, B_1 B_2 \overline{B_3}, B_1 B_2 B_3,$$

тобто за означенням суми подій

$$L = \overline{B_1} B_2 B_3 + B_1 \overline{B_2} B_3 + B_1 B_2 \overline{B_3} + B_1 B_2 B_3.$$

Нарешті, розв'язанню принаймні однієї задачі третього рівня відповідає подія M , яка полягає в появі принаймні однієї з сумісних подій C_1, C_2 , тобто

$$M = C_1 + C_2. \text{ Отже,}$$

$$D = A_1 A_2 A_3 A_4 * (\overline{B_1} B_2 B_3 + B_1 \overline{B_2} B_3 + B_1 B_2 \overline{B_3} + B_1 B_2 B_3) * (C_1 + C_2).$$

Задача 9

При підготовці до заліку перший студент вивчив 25 із 30 питань програми, другий - 20 і третій - 15. Для здачі заліку необхідно відповісти на 3 довільні питання програми. Знайти ймовірності подій:

$$L = \{\text{лише один студент здав залік}\};$$

$$M = \{\text{принаймні один студент здав залік}\}.$$

Розв'язання.

Позначимо події:

$A = \{\text{перший студент здав залік}\};$

$A_i = \{\text{перший студент відповів на } i\text{-те питання } (i = 1, 2, 3)\};$

$B = \{\text{другий студент здав залік}\};$

$B_i = \{\text{другий студент відповів на } i\text{-те питання}\};$

$C = \{\text{третій студент здав залік}\};$

$C_i = \{\text{третій студент відповів на } i\text{-те питання}\}.$

Тоді $A = A_1 A_2 A_3$, $B = B_1 B_2 B_3$, $C = C_1 C_2 C_3$. Обчислимо ймовірність події A .
Оскільки події A_1, A_2, A_3 залежні, то маємо:

$$P(A) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} = 0,57.$$

Аналогічно обчислюються ймовірності подій B і C : $P(B) = 0,28$, $P(C) = 0,11$.
Згідно з формулою дістаємо:

$$P(\bar{A}) = 0,43, P(\bar{B}) = 0,72, P(\bar{C}) = 0,89.$$

Подія L виражається через події A, B, C і їм протилежні так:

$$L = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C.$$

Оскільки всі доданки в правій частині цієї рівності - несумісні події, а множники в кожному доданку - незалежні в сукупності, то маємо:

$$\begin{aligned} P(L) &= P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) = \\ &= 0,57 \cdot 0,72 \cdot 0,89 + 0,43 \cdot 0,28 \cdot 0,89 + 0,43 \cdot 0,72 \cdot 0,11 = 0,51. \end{aligned}$$

Ймовірність події M обчислимо за формулою:

$$P(M) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - 0,43 \cdot 0,72 \cdot 0,89 = 0,72.$$

Задача 10

Два із трьох елементів обчислювального при. строю, що працюють незалежно один від одного, відказали. Знайти ймовірність того, що відказали другий і третій елементи, якщо ймовірність відказу першого, другого і третього елемента дорівнює відповідно 0,1, 0,12 і 0,17.

Розв'язання.

Позначимо подію $B = \{\text{відказали 2 елементи}\}$. Із повної групи гіпотез одночасно з подією B можуть відбутися лише такі:

$H_1 = \{\text{відказали 1-й і 2-й елементи}\};$

$H_2 = \{\text{відказали 1-й і 3-й елементи}\};$

$H_3 = \{\text{відказали 2-й і 3-й елементи}\}.$

Їхні ймовірності такі:

$P(H_1) = 0,012, P(H_2) = 0,017,$

$P(H_3) = 0,02$, а умовні ймовірності події B :

$P(B|H_1) = P(B|H_2) = P(B|H_3) = 1.$

Тому за формулою повної ймовірності

$P(B) = 0,049$, а за формулою Бейєса $P(H_3) = 0,408$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Радіостанція аеропорту надсилає 3 повідомлення для екіпажу літака. Імовірність прийому екіпажем першого повідомлення дорівнює 0,6, другого — 0,65, третього — 0,7. Знайдіть імовірність того, що екіпажем прийнято: а) тільки одне повідомлення; б) принаймні одне повідомлення.

2. Аеропорт протягом доби виконує 3 рейси до міста А. Імовірність затримки першого рейсу через метеоумови дорівнює 0,05, другого — 0,1, третього — 0,15. Знайдіть імовірність того, що: а) тільки один рейс буде виконано із затримкою; б) усі рейси буде виконано вчасно.

3. Через метеоумови літак було відправлено на запасний аеродром, при наближенні до якого на його борту залишалось палива на 3 заходи на посадку. Імовірність посадки літака при першому заході дорівнює 0,8, при другому — 0,95, при третьому — 0,995. Знайдіть імовірність благополучної посадки літака.

4. Аеропорт протягом доби виконує 3 рейси. Імовірності повного комерційного навантаження для першого, другого і третього рейсу дорівнює відповідно 0,9; 0,85 і 0,8. Знайдіть імовірності того, що з повним комерційним навантаженням буде виконано: а) тільки 2 рейси; б) принаймні 2 рейси.

5. На кожному з трьох верстатів виготовлено по одній деталі. Імовірність браку на першому верстаті дорівнює 0,05, на другому — 0,07, на третьому — 0,1. Знайдіть імовірність того, що серед виготовлених деталей: а) тільки одна бракована; б) принаймні одна бракована.

6. На станції спостереження встановлено 4 радіолокатори різних конструкцій, які виявляють об'єкт незалежно один від одного. Імовірність виявлення об'єкта першим локатором дорівнює 0,86, другим — 0,9, третім — 0,92, четвертим — 0,95. Знайдіть імовірність виявлення об'єкта: а) тільки одним локатором; б) принаймні одним локатором.

7. Із аеропорту протягом доби виконуються 3 рейси. Імовірність повного комерційного навантаження для першого рейсу дорівнює 0,95, для другого — 0,9, для третього — 0,85. Знайдіть імовірність того, що з повним комерційним навантаженням буде виконано: а) лише один рейс; б) принаймні один рейс.

8. Диспетчер керує двома літаками, що заходять на посадку двох різних коридорів. Імовірність посадки літака без відходу на друге коло з першого коридору дорівнює 0,95, а з другого — 0,92. Знайдіть імовірність того, що а) обидва літаки здійснять посадку без відходу на друге коло; б) тільки один літак відійде на друге коло; в) принаймні один літак відійде на друге коло.

9. Технічна система складається з трьох пристроїв, які працюють незалежно один від одного. Імовірність виходу з ладу за певний час роботи для першого пристрою дорівнює 0,1, для другого і третього пристроїв ця ймовірність однакова і дорівнює 0,15. Знайдіть імовірність виходу з ладу за час роботи: а) тільки одного пристрою; б) двох пристроїв; в) принаймні одного пристрою.

10. З аеропорту протягом дня виконуються 3 рейси. Імовірність затримки через метеоумови для першого рейсу дорівнює 0,1, для другого — 0,15, для третього — 0,2. Знайдіть імовірність того, що із затримкою буде відправлено: а) тільки один рейс; б) принаймні один рейс.

11. Імовірність виготовлення виробу найвищої якості на першому верстаті становить 0,7, на другому — 0,8. На першому верстаті виготовлено 2 вироби, на другому — 3. Знайдіть імовірність того, що всі виготовлені вироби мають найвищу якість.

12. З аеропорту A до аеропорту B щодоби виконуються 3 рейси. Імовірність придбання квитка на перший рейс дорівнює 0,85, на другий — 0,9, на третій — 0,95. Замовлено квитки на кожний рейс. Знайдіть імовірність одержання квитка: а) тільки на один рейс; б) на 2 рейси; в) принаймні на один рейс.

13. Для повідомлення про аварію встановлено 3 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Імовірність спрацьовування при аварії першого сигналізатора дорівнює 0,95, другого — 0,92, третього — 0,9. Знайдіть імовірності того, що при аварії спрацюють: а) тільки 2 сигналізатори; б) принаймні 2 сигналізатори.

14. Радіостанція аеропорту надсилає 3 повідомлення для екіпажу літака. Імовірність прийому екіпажем першого повідомлення дорівнює 0,9, другого — 0,95, третього — 0,98. Знайдіть імовірність того, що екіпажем прийнято: а) тільки 2 повідомлення; б) принаймні 2 повідомлення.

15. Відділ технічного контролю перевіряє деталі. Імовірність того, що деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,9. Знайдіть імовірність того, що: а) із трьох перевірених деталей тільки одна буде нестандартною; б) четверта з перевірених деталей виявиться нестандартною.

16. Три контролери незалежно один від одного перевіряють якість приладу. Імовірність приймання приладу першим контролером дорівнює 0,95, другим — 0,9, третім — 0,85. Знайдіть імовірність приймання приладу: а) тільки одним контролером; б) принаймні одним контролером; в) усіма контролерами.

17. З двох гармат зроблено по одному пострілу по цілі. Імовірність тільки одного влучення при цьому дорівнює 0,46. Відомо, що ймовірність влучення в ціль для першої гармати дорівнює 0,7. Знайдіть імовірність влучення для другої гармати.

Практичне заняття № 3

з навчальної дисципліни

**Теорія ймовірностей
та математична статистика**

Тема 1.3 Послідовності випробувань

Схема та формула Бернуллі. Послідовність випробувань із однаковою ймовірністю. Граничні теореми у схемі Бернуллі

Мета **Отримати практичні навички по обчисленню події, які класифікуються за схемою Бернуллі**

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i> (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи</i> (зміст завдання, послідовність їх виконання); <i>поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу</i> (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); <i>видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №3

- 1 Тема 1.3 Послідовності випробувань.
- 2 Робоче місце лекційна аудиторія навчального закладу.
- 3 Тривалість заняття становить 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу.
- 4 Мета проведення заняття надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності.
- 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця оснащено:
– персональним комп'ютером;
– засобами взаємодії із системою Moodle;
– комплектом програмного забезпечення.
- 6 Правила охорони праці "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером".
- 7 Зміст і послідовність виконання завдань надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи.
- 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення:
– звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;
– електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)».

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- як використовувати формулу Бернуллі;
- у який спосіб обчислюється ймовірність появи події у одному випробуванні;
- граничні теореми у схемі Бернуллі.

Вміти

- обчислювати ймовірність появи події у кількох випробуваннях за формулою Бернуллі;
- залучати граничні теореми для обчислення ймовірностей;
- користуватися таблицею значень локальної та інтегральної функціями Лапласа.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем _____ Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії _____ математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1

Ймовірність того, що витрата електроенергії в продовження однієї доби не перевищить встановленої норми, дорівнює $p = 0,75$. Знайти ймовірність того, що в найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом 4 діб не перевищить норми.

Позначимо

$$A = \{\text{витрата електроенергії в продовження однієї доби}\}$$

$$p = P(A) = 0,75$$

$$q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^{6-4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = 15 \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = 0,297$$

Приклад 2

Бортовий комп'ютер винищувача складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що

а) відмовлять два блоки

б) відмовить хоча б один блок

в) відмовлять не менше двох блоків

Позначимо

$$A = \{\text{відмова блока}\} \quad q = P(\bar{A}) = 0,8$$

$$P(A) = 1 - q = 1 - 0,8 = 0,2$$

Згідно з умовою задачі $n = 10$

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^{10-2} = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 8!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 = 45 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 = 0,302$$

$$P_{10}(1 \leq m \leq 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 \cdot p^0 \cdot q^{10-0} = 1 - 0,8^{10} = 0,893$$

$$P_{10}(2 \leq m \leq 10) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1)) = 1 - (C_{10}^0 \cdot p^0 \cdot q^{10} + C_{10}^1 \cdot p^1 \cdot q^9) = 0,624$$

Приклад 3

За одну годину автомат виготовляє 20 друкованих плат. За скільки годин імовірність виготовлення хоча б однієї бракованої плати буде не менше 0,952, якщо імовірність браку будь-якої плати дорівнює 0,01?

Знайдемо кількість виготовлених деталей, щоб можна було стверджувати про наявність хоча б однієї бракованої деталі

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0,952)}{\ln(1 - 0,01)} = \frac{\ln 0,048}{\ln 0,99} \approx 300$$

Визначимо час

$$t = \frac{n}{d} = \frac{300}{20} = 15$$

Висновок

Отже, за 15 годин автомат з ймовірністю 0,952 виготовить хоча б одну браковану деталь.

Приклад 4

При новому технологічному процесі 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш ймовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

Позначимо шукане число m_0

Згідно

За умовою прикладу

$$n = 250$$

$$p = 0,8$$

$$q = 0,2$$

$$250 \cdot 0,8 - 0,2 \leq m_0 \leq 250 \cdot 0,8 + 0,2$$

$$199,8 \leq m_0 \leq 200,2$$

Оскільки m_0 повинно бути цілим числом, то приймаємо $m_0 = 200$

Приклад 5

Диск випущено тиражем 100 000 екземплярів. Ймовірність бракованого примірника 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих примірників

Згідно з умовою задачі

$$n = 100\,000$$

$$p = 0,0001$$

$$m = 5$$

Якщо $n \rightarrow \infty$ та $p \rightarrow 0$ так, що $np \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то ймовірність появи події А m разів у n випробуваннях схеми Бернуллі можна знаходити за наближеною формулою Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

де $\lambda = np$

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5}{5!} \cdot e^{-10} = 0,0378$$

Приклад 6

Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться не менше 260 та не більше 274 разів.

Згідно з умовою задачі

$$m_1 = 260$$

$$m_2 = 274$$

$$P_{800}(260 < m < 274)$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P_{800}(260 < m < 274) = \Phi(0,55) + \Phi(0,5) = 0,2088 + 0,1915 = 0,4003$$

Отже, шукана ймовірність 0,4003

Практичне заняття № 4

з навчальної дисципліни

**Теорія ймовірностей
та математична статистика**

Тема 1.3 Послідовності випробувань

Послідовність випробувань із різними ймовірностями. Теорема Бернуллі. Проста течія подій

Мета **Отримати практичні навички в процесі розглядання
послідовності випробувань із різними ймовірностями**

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи (зміст завдання, послідовність їх виконання); поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №4

- | | |
|---|---|
| 1 Тема 1.3 | Послідовності випробувань. |
| 2 Робоче місце | лекційна аудиторія навчального закладу. |
| 3 Тривалість заняття становить | 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу. |
| 4 Мета проведення заняття | надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності. |
| 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця | оснащено: <ul style="list-style-type: none">– персональним комп'ютером;– засобами взаємодії із системою Moodle;– комплектом програмного забезпечення. |
| 6 Правила охорони праці | "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером". |
| 7 Зміст і послідовність виконання завдань | надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи. |
| 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення: | <ul style="list-style-type: none">– звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;– електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)». |

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- алгоритм використання твірної функції в процесі розглядання послідовності із різними ймовірностями;
- теорему Бернуллі;
- загальні поняття стосовно простої течії подій.

Вміти

- залучати твірну функцію для обчислення ймовірності появи в кількох випробуваннях в процесі розглядання послідовності випробувань;
- обчислювати ймовірності подій, спираючись на теорему Бернуллі;
- здійснювати аналіз простої течії подій.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1

Ймовірність відмови кожного з 4 ноутбуків у 4 незалежних випробуваннях різні та дорівнюють $p_1 = 0,1$ $p_2 = 0,2$ $p_3 = 0,3$ $p_4 = 0,4$

Знайти ймовірність того, що внаслідок випробувань

- а) не відмовить жоден ноутбук;
- б) відмовлять один, два, три, чотири ноутбуки;
- в) відмовить хоча б один ноутбук;
- г) відмовлять не менше двох ноутбуків

Твірня функція має вигляд

$$\varphi_4(z) = (q_1 + p_1z)(q_2 + p_2z)(q_3 + p_3z)(q_4 + p_4z)$$

$$\varphi_4(z) = (0,9 + 0,1z)(0,8 + 0,2z)(0,7 + 0,3z)(0,6 + 0,4z);$$

$$\varphi_4(z) = 0,3024 + 0,4404z + 0,2144z^2 + 0,0404z^3 + 0,0024z^4$$

Шукана ймовірність $P_n(m)$ дорівнює коефіцієнту, що стоїть при z^m

- а) $P_4(0) = 0,3024$
- б) $P_4(1) = 0,4404$; $P_4(2) = 0,2144$; $P_4(3) = 0,0404$; $P_4(4) = 0,0024$
- в) $P_4(1 \leq m \leq 4) = 1 - P_4(0) = 1 - 0,3024 = 0,6976$
- г) $P_4(m \geq 2) = 1 - (P_4(0) + P_4(1)) = 1 - (0,3024 + 0,4404) = 0,2572$

Приклад 2

Системний адміністратор одночасно проводить профілактику програмного забезпечення чотирьох комп'ютерів. Ймовірність того, що на протязі години перший комп'ютер не вимагатиме уваги, дорівнює 0,9, другий — 0,8, третій — 0,85, а четвертий 0,7 відповідно.

Якою є ймовірність того, що на протязі години

- а) жоден з комп'ютерів не потребуватиме уваги;
- б) усі чотири комп'ютери потребують уваги;
- в) хоча б один з комп'ютерів потребує уваги

Твірна функція має вигляд

$$\varphi_4(z) = (q_1 + p_1z) (q_2 + p_2z) (q_3 + p_3z) (q_4 + p_4z)$$

$$\varphi_4(z) = (0,1 + 0,9z) (0,2 + 0,8z) (0,15 + 0,85z) (0,3 + 0,7z);$$

$$\varphi_4(z) = 0,001 + 0,019z + 0,138z^2 + 0,414z^3 + 0,428z^4$$

а) імовірність того, що жоден з комп'ютерів не потребуватиме уваги, дорівнює коефіцієнту при z^4 , тобто $P_4(4) = 0,428$

б) імовірність того, що усі чотири комп'ютери потребують уваги $P_4(0) = 0,001$

в) $P_4(1 \leq m \leq 4) = 1 - P_4(4) = 1 - 0,428 = 0,572$

Приклад 3

Імовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що частість появи події відхиляється від імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

За умовою

$$n = 625$$

$$p = 0,8$$

$$q = 0,2$$

$$\varepsilon = 0,04$$

Треба знайти

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$$

За формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right) \approx 2\Phi\left(0,04 \cdot \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5)$$

З таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(2,5) = 0,4938$

$$2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876$$

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right) = 0,9876$$

Шукана імовірність наближено дорівнює 0,9876

Приклад 4

Імовірність появи події в кожному із незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти число випробувань n , при якому з імовірністю 0,7698 можна чекати, що частість появи події відхиляється від її імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

За умовою

$$p = 0,5$$

$$q = 0,5$$

$$\varepsilon = 0,02$$

$$n = ?$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| \leq 0,02\right) = 0,7698$$

За формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$2\Phi\left(0,02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 0,7698$$

$$2\Phi(0,04 \cdot \sqrt{n}) = 0,7698$$

$$\Phi(0,04 \cdot \sqrt{n}) = 0,3849$$

З таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(1,2) = 0,3849$

$$0,04 \cdot \sqrt{n} = 1,2$$

$$\sqrt{n} = 30$$

$$n = 900$$

Отже, шукана кількість випробувань 900

Приклад 5

Відділ технічного контролю перевіряє стандартність 900 виробів. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайти з імовірністю 0,9544 межі інтервалу, що містить число m стандартних виробів серед перевірених.

За умовою $n = 900$; $p = 0,9$; $q = 0,1$; $\varepsilon = ?$

За формулою

$$2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{900}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 0,9544$$

$$2\Phi(100\varepsilon) = 0,9544$$

$$\Phi(100\varepsilon) = 0,4772$$

$$P\left(\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq \varepsilon\right) = 0,9544$$

З таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(2) = 0,4772$

$$100\varepsilon = 2$$

$$\varepsilon = 0,02$$

Отже, з імовірністю 0,9544 відхилення частоти кількості стандартних виробів від імовірності 0,9 задовольняє нерівність

$$\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq 0,02$$

$$0,88 \leq \frac{m}{900} \leq 0,92$$

З останніх співвідношень випливає, що шукане число m стандартних виробів серед 900 перевірених з імовірністю 0,9544 належить інтервалу $792 \leq m \leq 828$.

Практичне заняття № 5

з навчальної дисципліни

**Теорія ймовірностей
та математична статистика**

Тема 1.4 Випадкові величини

Класифікація випадкових величин. Дискретні випадкові величини. Закони розподілу дискретних випадкових величин. Числові характеристики.

Мета **Отримати практичні навички по аналізу дискретних випадкових величин та обчисленню числових характеристик**

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи (зміст завдання, послідовність їх виконання); поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №5

- 1 Тема 1.4 Випадкові величини.
- 2 Робоче місце лекційна аудиторія навчального закладу.
- 3 Тривалість заняття становить 2 години, що відповідає вимогам
Закону України «Про вищу освіту»,
який встановлює загальні принципи
та норми організації навчального процесу.
- 4 Мета проведення заняття надати можливості освітянам здобути
практичних навичок в процесі опрацювання
інструкційно-методичного матеріалу до
поточного виду діяльності.
- 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця оснащено:
– персональним комп'ютером;
– засобами взаємодії із системою Moodle;
– комплектом програмного забезпечення.
- 6 Правила охорони праці "Інструктаж з охорони праці при
виконанні робіт за комп'ютером".
- 7 Зміст і послідовність виконання завдань надані у інструкційно-методичному
матеріалі до практичної роботи.
- 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення:
– звітні матеріали мають бути оформлені
відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015
«Звіти у сфері науки і техніки»;
– електронна версія звіту має бути опублікована
у Moodle відповідно до вимог публікації до
поточного виду діяльності навчального курсу
«ТІМС (спеціальність 123)».

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- які величини є випадковими, означення та класифікацію випадкових величин;
- закони розподілу дискретних випадкових величин;
- формули для обчислення числових характеристик дискретних випадкових величин.

Вміти

- складати для дискретних випадкових величин біноміальний, геометричний та гіпергеометричний закони розподілу;
- використовувати формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1

Випадкова величина X – кількість надійних приладів у системі, має такий ряд розподілу:

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

Знайти дисперсію $D(X)$.

Розв'язання.

За означенням математичного сподівання маємо:

$$M(X) = 1 \cdot 0,092 + 2 \cdot 0,398 + 3 \cdot 0,504 = 2,4$$

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,092 + 4 \cdot 0,398 + 9 \cdot 0,504 = 6,22$$

Тоді дисперсія

$$D(X) = 6,22 - 2,4^2 = 0,46$$

Приклад 2

Дискретну випадкову величину задано таким рядом розподілу:

X	-0,1	X ²	0,2	0,4
P	0,3	0,1	P ₃	P ₄

Знайти x_2, p_3, p_4 , якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 0,13$ і дисперсія $D(X) = 0,0341$. Скласти функцію розподілу $F(X)$ випадкової величини X та знайти ймовірність потрапляння цієї випадкової величини у проміжок $(-0,05, 0,2]$.

Розв'язання.

За умовою $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ для розподілу

$$0,3 + 0,1 + p_3 + p_4 = 1 \text{ або } p_4 = 0,6 - p_3.$$

За означенням математичного сподівання

$$M(X) = -0,03 + 0,1x_2 + 0,2p_3 + 0,4(0,6 - p_4) = 0,13$$

звідки дістаємо перше рівняння для знаходження x_2, p_3 :

$$0,1x_2 - 0,2p_3 = -0,08.$$

Для дисперсії

$$D(X) = 0,003 + 0,1x_2^2 + 0,04p_3 + 0,16(0,6 - p_4) - 0,13^2 = 0,0341,$$

звідки дістаємо друге рівняння:

$$0,1x_2^2 - 0,12p_3 = -0,048.$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} 0,1x_2 - 0,2p_3 = -0,08 \\ 0,1x_2^2 - 0,12p_3 = -0,048. \end{cases}$$

має розв'язки $x_{2_1} = 0$, $p_{3_1} = 0,4$ і $x_{2_2} = 0,6$, $p_{3_2} = 0,7$, другий з яких не задовольняє умову задачі, оскільки не виконується обов'язкова умова $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Тому остаточно $x_2 = 0$, $p_3 = 0,4$, $p_4 = 0,2$ і ряд розподілу набуває вигляду:

X	-0,1	0	0,2	0,4
P	0,3	0,1	0,4	0,2

Знайдемо функцію розподілу $F(X)$:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -0,1 \\ 0,3, & -0,1 < x < 0 \\ 0,4, & 0 < x < 0,2 \\ 0,8, & 0,2 < x < 0,4 \\ 1, & x > 0,4 \end{cases}$$

Ймовірність того, що X у результаті випробування набуде можливого значення з проміжку $(-0,05, 0,2]$ обчислимо з ряду розподілу:

$$P\{-0,05 < X < 0,2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 0,2\} = 0,5$$

Практичне заняття № 6

з навчальної дисципліни

**Теорія ймовірностей
та математична статистика**

Тема 1.4 Випадкові величини

Неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу неперервних випадкових величин. Числові характеристики.

Мета **Отримати практичні навички по аналізу дискретних випадкових величин та обчисленню числових характеристик**

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи (зміст завдання, послідовність їх виконання); поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №6

- | | |
|---|--|
| 1 Тема 1.4 | <u>Випадкові величини.</u> |
| 2 Робоче місце | <u>лекційна аудиторія навчального закладу.</u> |
| 3 Тривалість заняття становить | <u>2 години, що відповідає вимогам</u>
<u>Закону України «Про вищу освіту»,</u>
<u>який встановлює загальні принципи</u>
<u>та норми організації навчального процесу.</u> |
| 4 Мета проведення заняття | <u>надати можливості освітянам здобути</u>
<u>практичних навичок в процесі опрацювання</u>
<u>інструкційно-методичного матеріалу до</u>
<u>поточного виду діяльності.</u> |
| 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця | <u>оснащено:</u>
<u>– персональним комп'ютером;</u>
<u>– засобами взаємодії із системою Moodle;</u>
<u>– комплектом програмного забезпечення.</u> |
| 6 Правила охорони праці | <u>"Інструктаж з охорони праці при</u>
<u>виконанні робіт за комп'ютером".</u> |
| 7 Зміст і послідовність виконання завдань | <u>надані у інструкційно-методичному</u>
<u>матеріалі до практичної роботи.</u> |
| 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення: | <u>– звітні матеріали мають бути оформлені</u>
<u>відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015</u>
<u>«Звіти у сфері науки і техніки»;</u>
<u>– електронна версія звіту має бути опублікована</u>
<u>у Moodle відповідно до вимог публікації до</u>
<u>поточного виду діяльності навчального курсу</u>
<u>«ТІМС (спеціальність 123)».</u> |

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- які величини є випадковими, означення та класифікацію випадкових величин;
- мати уявлення стосовно функції та щільності розподілу;
- формули для обчислення числових характеристик неперервних випадкових величин.

Вміти

- визначати функцію та щільність розподілу неперервної випадкової величини;
- використовувати формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1

Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ A(x-1)^2, & 1 < x \leq 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A . Обчислити ймовірність потрапляння величини X в інтервал $(1, 2)$.

Розв'язання.

Оскільки випадкова величина X неперервна, то і її функція розподілу $F(x)$ також неперервна, тому $A(x-1)^2 = 1$ при $x = 3$. Звідси $A = 0,25$.

Ймовірність потрапляння величини X в інтервал $(1, 2)$ обчислимо як

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = 0,25(2-1)^2 = 0,25.$$

Приклад 2

Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде можливого значення з інтервалу $(1,2)$

Розв'язання.

Маємо

$$P\{1 < X < 2\} = \int_1^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x} \Big|_1^2 = \frac{e^{-\alpha} - 1}{e^{2\alpha}}.$$

Приклад 3

Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ A \sin x, & 0 < x \leq \pi. \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , функцію розподілу $F(x)$. Обчислити ймовірність потрапляння величини X в інтервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання.

За властивістю щільності розподілу маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\pi} A \sin x dx = -A \cos x \Big|_0^{\pi} = 2A = 1,$$

звідки $A = \frac{1}{2}$.

Маємо :

якщо $x \leq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0$;

якщо $0 < x \leq \pi$, то $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^x \sin x dx = \sin^2 \frac{x}{2}$;

якщо $x > \pi$, то $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^x 0 \cdot dx = 1$.

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin^2 \frac{x}{2}, & 0 < x \leq \pi. \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Ймовірність

$$P\left\{0 < X < \frac{\pi}{2}\right\} = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 0 = \frac{1}{2}.$$

Приклад 4

Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ A\sqrt[3]{x-1}, & 1 < x \leq 9. \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$

Знайти параметр A , щільність ймовірності $f(x)$, числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$, ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде можливого значення з інтервалу $(1,3)$.

Розв'язання.

За властивістю функції розподілу $F(9) = 2A = 1$, звідки $A = \frac{1}{2}$.

Щільність ймовірності $f(x) = F'(x) = \frac{1}{6\sqrt[3]{(x-1)^2}}, x \in (1,9)$.

Математичне сподівання обчислюємо

$$M(X) = \int_1^9 xf(x)dx = \frac{1}{6} \int_1^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Виконавши заміну $x - 1 = t^3$, перейдемо до змінної інтегрування $t \in (0,2)$

$$M(X) = \frac{1}{2} \int_0^2 (t^3 + 1)dt = 3.$$

Дисперсію обчислюємо, знову застосувавши при інтегруванні заміну $x - 1 = t^3$

$$D(X) = \frac{1}{6} \int_1^9 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} - 9 = \frac{1}{2} \int_0^2 (t^3 + 1)dt - 9 \approx 5,143.$$

Тоді середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) \approx 2,268.$$

Ймовірність того, що в результаті випробування X набуде можливого значення з інтервалу $(1,3)$ знайдемо

$$P\{1 < X < 3\} = F(3) - F(1) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2} \approx 0,63.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу $F(x)$ (щільністю ймовірності $f(x)$). Знайти параметр A , щільність ймовірності $f(x)$ (функцію розподілу $F(x)$), числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде можливого значення з інтервалу (α, β) .

$$1 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ A \ln x, & 1 < x \leq e \\ 1, & x > e \end{cases} \quad (e/3; e/2)$$

$$2 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ A(1 - 1/x^2), & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \quad (1, 2; 1, 7)$$

$$3 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ A \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\pi/4; \pi/3)$$

$$4 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ A\sqrt[3]{x}, & 0 < x \leq 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases} \quad (1; 8)$$

$$5 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{A}{x+1}, & 0 < x \leq e-1 \\ 1, & x > e-1 \end{cases} \quad (0; 1)$$

$$6 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ A\sqrt{x+1}, & -1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \quad (0; 2)$$

$$7 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ A(-x^2 + 4x), & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \quad (0; 1)$$

$$8 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A(\sin x + 1), & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (-\pi/3; \pi/3)$$

$$9 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ A(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases} \quad (0; \pi/2)$$

$$10 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ A \ln(2 + x), & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad (0; 2)$$

$$11 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{A}{1+x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad (0; 2)$$

$$12 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{A}{\sqrt{1+x^2}}, & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad (0; 1)$$

$$13 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ A \cos^2 x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (-\pi/4; \pi/4)$$

Практичне заняття № 7

з навчальної дисципліни

Теорія ймовірностей

та математична статистика

Тема 2.1 Основні поняття та статистичний розподіл

Організація даних, статистичний розподіл вибірки. Емпірична функція розподілу. Параметри лінії регресії.

Мета Отримати практичні навички по організації статистичних, даних, а також по візуалізації статистичних розподілів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи (зміст завдання, послідовність їх виконання); поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №7

- | | |
|---|---|
| 1 Тема 2.1 | Основні поняття та статистичний розподіл. |
| 2 Робоче місце | лекційна аудиторія навчального закладу. |
| 3 Тривалість заняття становить | 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу. |
| 4 Мета проведення заняття | надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності. |
| 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця | оснащено: <ul style="list-style-type: none">– персональним комп'ютером;– засобами взаємодії із системою Moodle;– комплектом програмного забезпечення. |
| 6 Правила охорони праці | "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером". |
| 7 Зміст і послідовність виконання завдань | надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи. |
| 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення: | <ul style="list-style-type: none">– звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;– електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)». |

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- поняття щодо генеральної та вибіркової сукупності;
- джерела забору статистичних даних;
- загальні принципи організації статистичних даних;
- означення стосовно емпіричної функції розподілу та її властивостей.

Вміти

- здійснювати опрацювання даних статистики;
- визначати емпіричну функцію розподілу;
- користуватися програмними засобами по візуалізації статистичних даних.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем _____ Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії _____ математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1

Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ за дискретним

x_i	0,81	0,82	0,85	0,87	0,90	0,94	0,97	0,99
p_i	3	4	6	9	8	6	2	2

та інтервальним

Інтервали	(0,81;0,84)	(0,84;0,87)	(0,87;0,90)	(0,90;0,93)	(0,93;0,96)	(0,96;0,99)
n_i^*	7	10	9	4	6	4

статистичними розподілами вибірки.

Розв'язання.

Для обчислення значень емпіричної функції скористаємося дискретним статистичним розподілом із відносними частотами $\omega_i = \frac{n_i}{n}$

x_i	0,81	0,82	0,85	0,87	0,90	0,94	0,97	0,99
ω_i	0,075	0,1	0,15	0,225	0,2	0,15	0,05	0,05

Значення функції $F^*(x)$ обчислюються простим нагромадженням відносних частот:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,81 \\ 0 + 0,075 = 0,075, & 0,81 < x \leq 0,82 \\ 0,075 + 0,1 = 0,175, & 0,82 < x \leq 0,85 \\ 0,175 + 0,15 = 0,325, & 0,85 < x \leq 0,87 \\ 0,325 + 0,225 = 0,55, & 0,87 < x \leq 0,9 \\ 0,55 + 0,2 = 0,75, & 0,9 < x \leq 0,94 \\ 0,75 + 0,15 = 0,9, & 0,94 < x \leq 0,97 \\ 0,9 + 0,05 = 0,95, & 0,97 < x \leq 0,99 \\ 0,95 + 0,05 = 1, & x > 0,99. \end{cases}$$

Приклад 2

У результаті вибіркового аналізу кількості пасажирів, що беруть квитки лише до проміжного пункту польоту, дістали такі дані:

2	4	9	5	4	8	3	6	7	2
0	7	5	3	7	6	0	4	4	3
7	6	5	9	6	5	8	7	5	4
6	5	5	8	5	5	9	4	6	8
8	5	5	7	5	6	6	4	4	7

Скласти

- 1) варіаційний ряд
- 2) дискретний статистичний розподіл вибірки
- 3) інтервальний розподіл.

Розв'язання.

1) Випишемо різні значення варіант, які потрапили у вибірку:

12 14 19 15 18 13 16 17 20.

Розмістивши їх у порядку зростання дістанемо дискретний варіаційний ряд:

12 13 14 15 16 17 18 19 20.

2) Обчислимо частоту кожної варіанти із варіаційного ряду і складемо таблицю. Дістанемо дискретний статистичний розподіл вибірки.

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	2	3	8	12	8	7	5	3	2

3) За обсягом вибірки $n = 50$ визначаємо орієнтовну кількість $m =$ частинних інтервалів в інтервальному статистичному розподілі, обчислюємо крок інтервалу

$$h = \frac{x_m - x_1}{m} = 1,14.$$

Тоді інтервальний варіаційний ряд запишеться у вигляді

[12;13,14) [13,14;14,28) [14,28;15,42) [15,42;16,56)
[16,56;17,70) [17,70;18,84) [18,84;20).

Підсумуємо частоти варіант, які потрапили в кожний із частинних інтервалів.
Тоді інтервальний статистичний розподіл вибірки матиме вигляд

Інтервали	[12;13,14)	[13,14;14,28)	[14,28;15,42)	[15,42;16,56)	[16,56;17,70)	[17,70;18,84)	[18,84;20)
n_i^*	5	8	12	8	7	5	5

Приклад 3

Визначити обсяг вибірки n нормально розподіленої випадкової величини, за якого похибка $\varepsilon = 0,01$ при обчисленні математичного сподівання гарантується з імовірністю 0,999, якщо середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5$.

Розв'язання.

Оскільки $\varepsilon = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то звідси $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\varepsilon^2}$. Значення t знаходимо з рівняння

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,999}{2} = 0,4995.$$

За таблицею функції Лапласа знаходимо $t = 3,4$, отже, $n = \frac{(3,4)^2 5^2}{(0,01)^2} = 2\,890\,000$.

Приклад 4

Під час вибіркового аналізу максимального завантаження літака при певній кількості пального, дістали такі дані:

78	80	85	88	89	90	92	93
92	85	93	89	80	90	85	89

Припускаючи, що максимальне завантаження літака має нормальний розподіл, знайти довірчий інтервал для дисперсії та середньо квадратичного відхилення з надійністю $\gamma = 0,95$.

Розв'язання.

Для побудови довірчих інтервалів необхідно знайти s^2 , $\sqrt{s^2}$.

Обчислимо значення $\bar{x}_B$:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{16} (78 + 80 \cdot 2 + 85 \cdot 3 + 88 \cdot 3 + 89 \cdot 3 + 90 \cdot 2 + 92 + 93) = 86,8;$$

$$s^2 = \frac{1}{15} (8,8^2 + 6,8^2 \cdot 2 + 1,8^2 \cdot 3 + 1,2^2 \cdot 3 + 2,2^2 \cdot 3 + 3,2^2 \cdot 2 + 5,2^2 + 6,2^2) = 19.$$

$$F(\chi_1^2(\gamma)) = \frac{1 - 0,95}{2} = 0,025; F(\chi_2^2(\gamma)) = \frac{1 + 0,95}{2} = 0,975.$$

За таблицею значень χ^2 з $n - 1 = 15$ ступенями свободи знаходимо $\chi_1^2 = 6$ і $\chi_2^2 = 25$ і дістаємо довірчі інтервали відповідно для дисперсії та середньо квадратичного відхилення (11,4;47,5) і (3,4;6,9).

Приклад 5

Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y за даними $n = 5$ спостережень:

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Розв'язання. Складемо таблицю

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i=15$	$\sum y_i=8,15$	$\sum x_i^2=57,50$	$\sum x_i^2=26,975$

Знайдемо шукані параметри, для чого підставимо обчислені в таблиці величини в формули:

$$\rho_{yx} = \frac{5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 0,202$$

$$b = \frac{57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975}{62,5} = 1,024$$

Запишемо шукане рівняння регресії:

$$Y = 0,202x + 1,024$$

Для того, щоб отримати уявлення про те, наскільки добре пораховані за цим рівнянням значення Y_i узгоджуються з спостережуваними значеннями y_i , знайдемо відхилення $Y_i - y_i$. Результати наведено в таблиці:

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	-0,024
1,50	1,327	1,40	-0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,083
5,00	2,034	2,25	-0,216

Кореляційна таблиця

При великій кількості спостережень одне і те ж значення x може зустрітися n_x раз, одне і те ж значення y може зустрітися n_y раз, одна і та ж пара чисел (x, y) може спостерігатися n_{xy} раз. Тому дані спостережень групують, тобто підраховують частоти n_x, n_y, n_{xy} . Усі згруповані дані записують у вигляді таблиці, яку називають *кореляційною*.

Розглянемо на прикладі склад кореляційної таблиці.

	10	20	30	40	n_y
0,4	5	-	7	14	26
0,6	-	2	6	4	12
0,8	3	19	-	-	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

У першому рядку таблиці вказані спостережувані значення (10;20;30;40) ознаки X , а в першому стовпчику – спостережувані значення (0,4;0,6;0,8) ознаки Y . На перетині рядків та стовпців вписані частоти n_{xy} спостережуваних пар значень при знаків. Наприклад, частота 5 показує, що пара чисел (10;0,4) спостерігалась 5 раз. Риска означає, що відповідна пара чисел, наприклад (20;0,4) не спостерігалась.

В останньому стовпці записані суми частот рядків. Наприклад, сума частот першого рядку дорівнює $n_y = 5 + 7 + 14 = 26$; це число вказує, що значення ознаки , що дорівнює 0,4 спостерігалось 26 раз.

В останньому рядку записані суми частот стовпчиків. Наприклад, число 8 вказує, що значення ознаки , що дорівнює 10 спостерігалось 8 раз.

У клітці, що знаходиться в нижньому правому кутку таблиці, зображено суму всіх частот (загальне число всіх спостережень n).

$$\text{Очевидно } \sum n_x = \sum n_y = n.$$

$$\sum n_x = 8 + 21 + 13 + 18 = 60$$

$$\sum n_y = 26 + 12 + 22 = 60$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Вимірювання відхилень розрахункового часу польоту літака від фактичного дали такі результати, хв.:

x_i	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
n_i	5	8	12	21	20	40	30	20	20	14	10

Знайти точкові незміщені оцінки середнього значення і середньо квадратичного відхилення відхилень розрахункового часу польоту літака від фактичного. ($\bar{x}_B = 0,2, \sigma_B = 1,2$)

2. У ВТК (відділ технічного контролю) було виміряно 400 валиків із партії, які виготовляє завод. Результати вимірювань, мм:

Інтервал	(10,4; 10,6)	(10,6; 10,8)	(10,8; 11)	(11;11,2)	(11,2;11,4)
пi	40	100	200	40	20

Знайти точкові незміщені оцінки середнього значення, виправленої дисперсії та середнього квадратичного відхилення розмірів валиків.

3. Побудувати інтервальний статистичний розподіл задачі 1 і знайти точкові незміщені оцінки середнього значення, виправленої дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкової величини, описаної в цій задачі.

4. Знайти довірчі інтервали та точність відповідних інтервальних оцінок для невідомого математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини X , якщо $\sigma^2 = D(X) = 25$, обсяг вибірки $n=36$ і $\bar{x}_B=7$. Довірчі інтервали та відповідні їм точності побудувати для надійності $\gamma=0,95$; $\gamma=0,99$; $\gamma=0,999$.

5. Залишок X пального в баках літака після кожного з 15 рейсів за заданим маршрутом мав такі значення, кг:

340,2	316,8	325,3	329,2	351,8	348,7	330,1	345,6
352,3	331,7	318,4	332,2	341,4	38,2	341,4	

Побудувати довірчий інтервал з надійністю $\gamma=0,999$ для математичного сподівання залишку пального в баках літака після рейсу, вважаючи, що залишок пального — нормально розподілена випадкова величина.

Практичне заняття № 8

з навчальної дисципліни

Теорія ймовірностей

та математична статистика

Тема 2.2 Статистичні оцінки параметрів розподілу

Знаходження рівняння лінії регресії. Метод чотирьох полів.

Мета Отримати практичні навички по використанню методів, обчислення числових характеристик вибіркової сукупності

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i> (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи</i> (зміст завдання, послідовність їх виконання); <i>поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу</i> (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); <i>видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №8

- | | |
|---|---|
| 1 Тема 2.2 | Статистичні оцінки параметрів розподілу. |
| 2 Робоче місце | лекційна аудиторія навчального закладу. |
| 3 Тривалість заняття становить | 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу. |
| 4 Мета проведення заняття | надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності. |
| 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця | оснащено: <ul style="list-style-type: none">– персональним комп'ютером;– засобами взаємодії із системою Moodle;– комплектом програмного забезпечення. |
| 6 Правила охорони праці | "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером". |
| 7 Зміст і послідовність виконання завдань | надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи. |
| 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення: | <ul style="list-style-type: none">– звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;– електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)». |

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- загальні принципи організації статистичних даних;
- означення стосовно емпіричної функції розподілу та її властивостей.

Вміти

- здійснювати опрацювання даних статистики;
- знаходити коефіцієнт кореляції методом чотирьох полів;
- складати рівняння лінії регресії.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Нехай потрібно за даними кореляційної таблиці обчислити вибіркового коефіцієнта кореляції. Розрахунки можна спростити, якщо перейти до умовних варіантів (при цьому величина r_B не зміниться)

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}, v_i = \frac{y_j - c_2}{h_2},$$

де u_i, v_i – умовні варіанти, c_1, c_2 – хибні нулі, тобто варіанти, що мають найбільшу частоту, h_1, h_2 – кроки, тобто різниці між будь-якими двома сусідніми варіантами.

У цьому випадку вибіркового коефіцієнта кореляції обчислюється за формулою:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}.$$

Величина $\sum n_{uv}uv$ обчислюється *методом чотирьох полів*. Назва метода пов'язана з тим, що рядок і стовпчик, які перетинаються в клітці, що має найбільшу частоту, ділять кореляційну таблицю на 4 частини, які називають полями. Поля нумеруються так, як показано в таблиці 1.

Таблиця 1

		0	
	I		II
0			
	III		IV

Розглянемо як проходить обчислення. Для цього обмежимося полем I. Нехай частина таблиці, яка містить перше поле, зображена в таблиці 2.

Таблиця 2

	-3	-2	-1
-2	5	7	-
-1	-	20	23

Знайдемо добуток пар варіант u, v та запишемо їх у верхні праві кутки кліток, що містять відповідні частоти. Наприклад, пара варіант $u = -3$ і $v = -2$ спостерігалась 5 раз; добуток $uv = (-3)(-2) = 6$ записуємо в верхній правий кут клітки, що містить частоту 5. Заповнивши аналогічно останні клітки першого поля, отримаємо таблицю 3.

Таблиця 3

	-3	-2	-1
-2	6 5	4 1	-
-1	-	2 20	1 23

Аналогічно заповнюються клітки інших полів. Таким чином, в кожній клітці (що містить частоту n_{uv}) записано добуток uv . Залишається перемножити два числа n_{uv} і uv кожної клітинки та отримані результати додати; в результаті отримаємо шукане число $\sum n_{uv}uv$.

Для зручності контролю розрахунків знайдені добутки чисел n_{uv} та uv кожної клітинки додаються окремо по кожному полю, причому підрахунок ведеться і за рядками і за стовпчиками кожного поля: суму чисел $n_{uv} \cdot uv$ рядка поля виписують в той додатковий стовпчик, що знаходиться справа, який має номер того поля, числа якого додавались. Суму чисел $n_{uv} \cdot uv$ стовпчика поля записують в той додатковий рядок, що знаходиться знизу, який має номер того поля, числа якого додавались. Суми чисел окремо по кожному полю записують в правому нижньому кутку таблиці в чотирьох підсумкових клітинках. Додаючи всі числа підсумкових клітинок, знаходимо шукане число.

Схематично розрахункова таблиця представлена у вигляді таблиці 4.

Розглянемо, як заповнена таблиця 4 (розрахунки приведемо лише для першого поля).

Знайдемо суми добутків $n_{uv} \cdot uv$ за рядками першого поля

$$(5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 = 58; 20 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 63)$$

і запишемо їх у додатковий стовпчик I.

Таблиця 4

	-3	-2	-1	0		I	II
-2	6 5	4 7	-		II	58	
-1	-	2 20	1 23			63	
0						III	IV
		III					
I	30	68	23	II		121	II
III				IV		III	IV

Знайдемо суми добутків $n_{uv} \cdot uv$ за стовпчиками першого поля

$$(5 \cdot 6 = 30; 7 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 68; 23 \cdot 1 = 23)$$

і запишемо їх в додатковий рядок I.

Знайдемо суму чисел додаткового стовпчика I ($58 + 63 = 121$) і запишемо її в першу підсумкову клітинку (в правому нижньому кутку таблиці).

Для контролю додамо всі числа додаткового рядка

$$(30 + 68 + 23 = 121).$$

Аналогічно ведеться розрахунок і по останніх полях.

Приклад

Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції за даними таблиці 5.

Таблиця 5

	10	20	30	40	50	60	n_y
15	5	7	-	-	-	-	12
25	-	20	23	-	-	-	43
35	-	-	30	47	2	-	79
45	-	-	10	11	20	6	47
55	-	-	-	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Розв'язання.

Перейдемо до умовних варіант

$$u = \frac{x - c_1}{h_1} = \frac{x - 40}{10},$$

В якості c_1 беремо варіанту $x = 40$, що має найбільшу частоту; крок

$$h_1 = 20 - 10 = 10$$

дорівнює різниці між двома сусідніми варіантами.

$$v = \frac{y - c_2}{h_2} = \frac{y - 35}{10}$$

В якості c_2 беремо варіанту $y = 35$, що має найбільшу частоту; крок

$$h_2 = 25 - 15 = 10$$

дорівнює різниці між двома сусідніми варіантами.

Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах. У першому стовпчику замість варіанти (35), що має найбільшу частоту, записуємо 0; над нулем записуємо послідовно -1, -2; під нулем записуємо 1,2. У першому рядку замість варіанти (40), що має найбільшу частоту, записуємо 0; зліва від нуля послідовно записуємо -1, -2, -3; справа від нуля записуємо 1,2. Останні дані переписуємо із вхідної кореляційної таблиці. У результаті отримаємо кореляційну таблицю 6 в умовних варіантах.

Таблиця 6

	-3	-2	-4	0	1	2	n_v
-2	5	7	-	-	-	-	12
-1	-	20	23	-	-	-	43
0	-	-	30	47	2	-	79
1	-	-	10	11	20	6	47
2	-	-	-	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Величини σ_u, σ_v обчислюємо, користуючись формулами:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}$$

Знайдемо $\overline{u}$, та $\overline{v}$:

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u u}{n} = \frac{5 \cdot (-3) + 27 \cdot (-1) + 63 \cdot (-2) + 29 \cdot 1 + 9 \cdot 2}{200} = -0,425$$

$$\overline{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{12 \cdot (-2) + 43 \cdot (-1) + 47 \cdot 1 + 19 \cdot 2}{200} = 0,09.$$

Обчислимо допоміжну величину $\overline{u^2}$, а потім σ_u :

$$\overline{u^2} = \frac{5 \cdot 9 + 27 \cdot 4 + 63 \cdot 1 + 29 \cdot 1 + 9 \cdot 4}{200} = 1,405$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{1,405 - 0,425^2} = 1,106.$$

Аналогічно знаходимо $\sigma_v = 1,209$.

Знайдемо $\sum n_{uv}uv$ методом чотирьох полів, для чого скористаємося розрахунковою таблицею 7.

Склавши числа підсумкових клітинок (4 клітинки в нижньому правому кутку таблиці 7), отримаємо:

$$\sum n_{uv}uv = 121 - 10 + 58 = 169.$$

Знайдемо шуканий коефіцієнт кореляції:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{169 - 200 \cdot (-0,425) \cdot 0,09}{200 \cdot 1,106 \cdot 1,209} = 0,603 .$$

Отже, $r_B = 0,603$.

Таблиця 7

	-3	-2	-1	0	1	2	I	II
-2	6 5	4 7	-		-	-	58	-
-1	-	2 20	1 23		-	-	63	-
0							III	IV
1	-	-	-1 10		1 20	2 6	-10	32
2	-	-	-		2 7	4 3	-	26
I	30	68	23	II	-	-	121	-
III	-	-	-10	IV	34	24	-10	58

Тепер, коли відомо r_B , розглянемо приклад на знаходження рівняння прямої лінії регресії.

Оскільки при знаходженні r_B величини $\bar{u}, \bar{v}, \sigma_u, \sigma_v$ уже знайдені, то зручно скористатися формулами:

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u, \quad \sigma_y = h_2 \sigma_v, \quad \bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1, \quad \bar{y} = \bar{v}h_2 + c_2.$$

Приклад

Знайти вибіркове рівняння лінії регресії Y на X за даними таблиці 5.

Розв'язання.

Знайдемо шукане рівняння в загальному вигляді

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}).$$

Знайдемо невідомі величини:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1 = -0,425 \cdot 10 + 40 = 35,75;$$

$$\bar{y} = \bar{v}h_2 + c_2 = 0,09 \cdot 10 + 35;$$

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u = 1,106 \cdot 10 = 11,06;$$

$$\sigma_y = h_2 \sigma_v = 1,209 \cdot 10 = 12,09.$$

Підставивши знайдені величини в рівняння, отримаємо:

$$\bar{y}_x - 35,9 = 0,603 \frac{12,09}{11,06} (x - 35,75),$$

або

$$\bar{y}_x = 0,659x + 12,34.$$

Практичне заняття № 9

з навчальної дисципліни

Теорія ймовірностей

та математична статистика

Тема 2.2 Статистичні оцінки параметрів розподілу

Знаходження коефіцієнта кореляції, складання вибіркового рівняння регресії у випадку лінійної та криволінійної кореляції.

Мета Отримати практичні навички по здійсненню аналізу, точкових та інтервальних оцінок та довірчого інтервалу

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i> (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи</i> (зміст завдання, послідовність їх виконання); <i>поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу</i> (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); <i>видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №9

- 1 Тема 2.2 Статистичні оцінки параметрів розподілу.
- 2 Робоче місце лекційна аудиторія навчального закладу.
- 3 Тривалість заняття становить 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу.
- 4 Мета проведення заняття надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності.
- 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця оснащено:
– персональним комп'ютером;
– засобами взаємодії із системою Moodle;
– комплектом програмного забезпечення.
- 6 Правила охорони праці "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером".
- 7 Зміст і послідовність виконання завдань надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи.
- 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення:
– звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;
– електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)».

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- які використовуються для оцінки невідомих параметрів популяції на основі вибірових даних;
- різниці між параметричними і непараметричними методами;
- поняття стандартної похибки, що використовується для оцінки точності точкової та інтервальної оцінок.

Вміти

- застосовувати різні методи для отримання точкових та інтервальних оцінок, враховуючи природу даних та статистичні передумови;
- комунікувати результати аналізу точкових та інтервальних оцінок зрозуміло та логічно.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем _____ Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії _____ математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

Приклад 1

Обчислити вибіркового коефіцієнта кореляції за даними таблиці

	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22
56				1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

Розв'язання.

Перейдемо до умовних варіант

$$u = \frac{x - c_1}{h_1} = \frac{x - 30}{5},$$

В якості c_1 беремо варіанту $x = 30$, що має найбільшу частоту; крок

$$h_1 = 25 - 20 = 5$$

дорівнює різниці між двома сусідніми варіантами.

$$v = \frac{y - c_2}{h_2} = \frac{y - 36}{10}$$

В якості c_2 беремо варіанту $y = 36$, що має найбільшу частоту; крок

$$h_2 = 26 - 16 = 10$$

дорівнює різниці між двома сусідніми варіантами.

Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах. У першому стовпчику замість варіанти (33), що має найбільшу частоту, записуємо 0; над нулем записуємо

послідовно -1, -2; під нулем записуємо 1,2. У першому рядку замість варіанти (36), що має найбільшу частоту, записуємо 0; зліва від нуля послідовно записуємо -1, -2; справа від нуля записуємо 1,2. Останні дані переписуємо із вхідної кореляційної таблиці. У результаті отримаємо кореляційну таблицю 6 в умовних варіантах.

	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	4	6				10
-1		8	10			18
0			32	3	9	44
1			4	12	6	22
2				1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	$n = 100$

Величини σ_u, σ_v обчислюємо, користуючись формулами:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}$$

Знайдемо $\bar{u}$, та $\bar{v}$:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n} = \frac{4 \cdot (-2) + 14 \cdot (-1) + 16 \cdot 1 + 20 \cdot 2}{100} = 0,34$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{10 \cdot (-2) + 18 \cdot (-1) + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{100} = -0,04.$$

Обчислимо допоміжні величини $\overline{u^2}$ та $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = \frac{\sum n_u u^2}{n} = \frac{4 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 20 \cdot 4}{100} = 1,26$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_v v^2}{n} = \frac{10 \cdot 4 + 18 \cdot 1 + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 4}{100} = 1,04.$$

Знайдемо σ_u, σ_v :

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1,26 - 0,34^2} = 1,07$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2} = \sqrt{1,04 - 0,04^2} = 1,02.$$

Знайдемо $\sum n_{uv}uv$ методом чотирьох полів, для чого скористаємося розрахунковою таблицею.

	-2	-1	0	1	2	I	II
-2	4 4	2 6				28	
-1		1 8				8	
0							
1				1 12	2 6		24
2				2 1	4 5		22
I	16	20				32	36
III				14	32	46	46

Склавши числа підсумкових клітинок (4 клітинки в нижньому правому кутку таблиці 7), отримаємо:

$$\sum n_{uv}uv = 82.$$

Знайдемо шуканий коефіцієнт кореляції:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{82 - 100 \cdot 0,34 \cdot (-0,04)}{100 \cdot 1,07 \cdot 1,02} = 0,76.$$

Отже, $r_B = 0,76$.

Тепер, коли відомо r_B , знайдемо рівняння прямої лінії регресії.

Оскільки при знаходженні r_B величини $\bar{u}, \bar{v}, \sigma_u, \sigma_v$ уже знайдені, то зручно скористатися формулами:

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u, \quad \sigma_y = h_2 \sigma_v, \quad \bar{x} = \bar{u} h_1 + c_1, \quad \bar{y} = \bar{v} h_2 + c_2.$$

Знайдемо невідомі величини:

$$\bar{x} = \bar{u} h_1 + c_1 = 0,34 \cdot 5 + 30 = 31,70;$$

$$\bar{y} = \bar{v} h_2 + c_2 = (-0,04) \cdot 10 + 36 = 35,60;$$

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u = 5 \cdot 1,07 = 5,35;$$

$$\sigma_y = h_2 \sigma_v = 10 \cdot 1,02 = 10,2.$$

Підставивши знайдені величини в рівняння, отримаємо:

$$\bar{y}_x - 35,60 = 0,76 \frac{10,2}{5,35} (x - 31,70),$$

або

$$\bar{y}_x = 1,45x - 10,36.$$

Приклад 2

Знайти вибіркове рівняння регресії $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ та вибіркове кореляційне відношення η_{xy} за даними, наведеними в кореляційній таблиці.

	2	3	5	n_y
25	20			20
45		30	1	31
110		1	48	49
n_x	20	31	49	$n = 100$

Складемо розрахункову таблицю

x	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y_x}$	$n_x \overline{y_x} x$	$n_x \overline{y_x} x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	41,7	93	279	837	2511	1460	4380	13141
5	49	108,67	245	1225	6125	30625	5325	26624	133121
Σ	100		378	1584	7122	33456	7285	32004	148262

Підставивши числа в формулу, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A, B, C :

$$33456A + 7122B + 1584C = 148262$$

$$7122A + 1584B + 378C = 32004$$

$$1584A + 378B + 100C = 7285$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $A = 2,94, B = 7,27, C = -1,25$.

Підставивши знайдені коефіцієнта в рівняння регресії $\overline{y_x} = Ax^2 + Bx + C$, отримаємо

$$\overline{y_x} = 2,94x^2 + 7,27x - 1,25.$$

Знайдемо вибірккову середню $\bar{y}$, загальне середньоквадратичне відхилення σ_y та міжгрупове середньоквадратичне відхилення $\sigma_{\overline{y_x}}$:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma n_y y}{n} = \frac{20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 110}{100} = 72,85$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{20(25 - 72,85)^2 + 31(45 - 72,85)^2 + 49(110 - 72,85)^2}{100}} = 37,07$$

$$\sigma_{\overline{y_x}} = \sqrt{\frac{\Sigma n_x (\overline{y_x} - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{20(25 - 72,85)^2 + 31(47,1 - 72,85)^2 + 49(108,67 - 72,85)^2}{100}} = 35,95$$

Знайдемо шукане вибірккове кореляційне відношення: $\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y} = \frac{35,95}{37,07} = 0,97$

ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції за даними таблиці

Задача 1

	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n = 50$

Задача 2

	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125		1						1
150	1	2	5					8
175		3	2	12				17
200			1	8	7			16
225					3	3		6
250						1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

Знайти вибіркве рівняння регресії $\overline{y_x} = Ax^2 + Bx + C$ та вибіркве кореляційне відношення η_{xy} за даними, наведеними в кореляційній таблиці.

Задача 3

	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1			20
3	1	20				21
5	3	5	10	2		20
10			7	12		19
17					20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n = 100$

Задача 4

	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1			21
13	2	14				16
40		3	22	2		27
80				15		15
200					21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n = 100$

Задача 5

	0	4	5	n_y
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
n_x	50	54	46	$n = 50$

Задача 6

	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5				25
11	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
35			8	13	7	28
50				5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	$n = 50$

Задача 7

	7	8	9	n_y
200	41	7		48
300	1	52	1	54
400		8	40	48
n_x	42	67	41	$n = 150$

Практичне заняття № 10

з навчальної дисципліни

Теорія ймовірностей

та математична статистика

Тема 2.3 Статистична перевірка гіпотез

Застосування методів дисперсійного аналізу

Мета Отримати практичні навички по застосуванню алгоритму перевірки статистичних гіпотез

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи (зміст завдання, послідовність їх виконання); поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №10

1 Тема 2.3 Статистична перевірка гіпотез.
2 Робоче місце лекційна аудиторія навчального закладу.

3 Тривалість заняття становить 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу.

4 Мета проведення заняття надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності.

5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця оснащено:
– персональним комп'ютером;
– засобами взаємодії із системою Moodle;
– комплектом програмного забезпечення.

6 Правила охорони праці "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером".

7 Зміст і послідовність виконання завдань надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи.

8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення:
– звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;
– електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)».

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- різновиди статистичних гіпотез;
- похибки перевірки гіпотез;
- критерії узгодження для перевірки гіпотез;
- порядок дій при перевірці статистичних гіпотез.

Вміти

- знаходити одnobічну критичну область;
- знаходити рівень значущості;
- здійснювати заходи по знаходженню критичних областей;
- визначати альтернативну гіпотезу до основної.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем _____ Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії _____ математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

Приклад

Відбулося по 4 випробування на кожному з трьох рівнів. Результати випробувань наведено в таблиці. Методом дисперсійного аналізу при рівні значимості 0,05 перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх. Припускається, що вибірки отримані з нормальних сукупностей з однаковими дисперсіями.

Номер випробування i	Рівні фактору F_j		
	F_1	F_2	F_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52
Групова середня $\bar{x}_{грj}$	54	55	47

Розв'язання.

Для спрощення обчислень віднімемо $C = 52$ від кожного спостережуваного значення $y_{ij} = x_{ij} - 52$. Складемо таблицю.

Користаючись таблицею та враховуючи, що число рівнів фактору $p = 3$, число випробувань на кожному рівні $q = 4$, знайдемо загальну та факторну суми квадратів відхилень:

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^p Q_j - \frac{[\sum_{j=1}^p T_j]^2}{pq} = 266 - 0 = 266,$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum_{j=1}^p T_j^2}{q} - \frac{[\sum_{j=1}^p T_j]^2}{pq} = \frac{608}{4} - 0 = 152.$$

Номер випробування i	Рівні фактору F_j						
	F_1		F_2		F_3		
	y_{i1}	y^2_{i1}	y_{i2}	y^2_{i2}	y_{i3}	y^2_{i3}	
1	-1	1	0	0	-10	100	
2	0	0	2	4	-8	64	
3	4	16	4	16	-2	4	
4	5	25	6	36	0	4	
$S_j = \sum_{i=1}^q y^2_{ij}$		42		56		168	$\sum S_j = 266$
T_j	8		12		-20		$\sum T_j = 0$
T^2_j	64		144		400		$\sum T_j^2 = 608$

Знайдемо загальну суму квадратів відхилень:

$$S_{\text{залиш}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}} = 266 - 152 = 114.$$

Знайдемо факторну та залишкову дисперсії:

$$S^2_{\text{факт}} = \frac{S_{\text{факт}}}{p - 1} = \frac{152}{3 - 1} = 76,$$

$$S^2_{\text{залиш}} = \frac{S_{\text{залиш}}}{p(q - 1)} = \frac{114}{3(4 - 1)} = \frac{114}{9} = 12,67.$$

Порівняємо факторну та залишкову дисперсії, для чого знайдемо спостережуване значення критерію:

$$F_{\text{спост}} = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{залиш}}} = \frac{76}{12,67} = 6.$$

Враховуючи, що число степенів свободи чисельника $k_1 = 2$, а знаменника $k_2 = 9$ і рівень значимості $\alpha = 0,05$, за таблицею знаходимо критичну точку

$$F_{\text{кр}}(0,05; 2; 9) = 4,26.$$

Оскільки $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, нульову гіпотезу про рівність середніх відхиляємо. Тобто, групові середні «в цілому» різняться суттєво.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

При рівні значимості 0,05 перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх. Припускається, що вибірки отримані з нормальних сукупностей з однаковими генеральними дисперсіями.

Задача 1

Номер випробування i	Рівні фактору F_j				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	42	66	35	64	70
2	55	91	50	70	79
3	67	96	60	79	88
4	67	98	69	81	90
Групова середня $\bar{x}_{грj}$	57,75	87,75	53,50	73,50	81,75

Відповідь. $F_{\text{спост}} = 6,13$, $F_{\text{кр}}(0,05; 4; 15) = 3,06$, нульова гіпотеза відхиляється.

Задача 2

Номер випробування i	Рівні фактору F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	6	6	9	7
2	7	7	12	9
3	8	11	13	10
4	11	12	14	10
Групова середня $\bar{x}_{грj}$	8	9	12	9

Відповідь. $F_{\text{спост}} = 2,4$, $F_{\text{кр}}(0,05; 3; 12) = 3,49$, немає підстав відхилити нульову гіпотезу.

Практичне заняття № 11

з навчальної дисципліни

Теорія ймовірностей

та математична статистика

Тема 2.3 Статистична перевірка гіпотез

Порівняння двох середніх (дисперсії яких відомі)

Мета Отримати практичні навички в процесі перевірки гіпотези, а також по критеріям дисперсного аналізу

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

1 Інтерактивний вид діяльності, створений засобами Moodle

2 Інструктивно-методичний матеріал по виконання роботи

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв.	Включає в себе: <i>привітання</i> , яке має на меті привернути увагу, забезпечити контакт лектора з аудиторією; <i>визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв.	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми (вказати питання та завдання для перевірки знань студентів)</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв.	Включає в себе: <i>ознайомлення з основними теоретичними положеннями, технологічними прийомами, операціями; інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань практичної роботи (зміст завдання, послідовність їх виконання); поточний контроль виконання роботи, консультативну роботу</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: (відповідно до робочої програми)	5 хв.	Включає в себе: <i>захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу (аналіз, узагальнення та систематизація знань, умінь, навичок); видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць</i>

Література

1 Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Навч. Посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К: Центр навчальної літератури, 2006. – 424с.

Інструкційна картка

для проведення практичного заняття №11

- 1 Тема 2.3 Статистична перевірка гіпотез.
- 2 Робоче місце лекційна аудиторія навчального закладу.
- 3 Тривалість заняття становить 2 години, що відповідає вимогам Закону України «Про вищу освіту», який встановлює загальні принципи та норми організації навчального процесу.
- 4 Мета проведення заняття надати можливості освітянам здобути практичних навичок в процесі опрацювання інструкційно-методичного матеріалу до поточного виду діяльності.
- 5 Матеріально-технічне оснащення робочого місця оснащено:
– персональним комп'ютером;
– засобами взаємодії із системою Moodle;
– комплектом програмного забезпечення.
- 6 Правила охорони праці "Інструктаж з охорони праці при виконанні робіт за комп'ютером".
- 7 Зміст і послідовність виконання завдань надані у інструкційно-методичному матеріалі до практичної роботи.
- 8 Методичні рекомендації щодо виконання й оформлення:
– звітні матеріали мають бути оформлені відповідно до діючих вимог ДСТУ 3008:2015 «Звіти у сфері науки і техніки»;
– електронна версія звіту має бути опублікована у Moodle відповідно до вимог публікації до поточного виду діяльності навчального курсу «ТІМС (спеціальність 123)».

9 Після виконаної практичної роботи студент повинен:

Знати

- в який спосіб здійснюється перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань;
- критерії дисперсійного аналізу;
- критерії узгодження Пірсона.

Вміти

- користуватися критеріями дисперсного аналізу;
- здійснювати порівняння двох середніх у випадку, коли їх дисперсії відомі.

10 Захист роботи здійснюється після фіксації факту:
– наявності звітних матеріалів, що опубліковані до завдання
поточного виду діяльності у системі Moodle;
– відповідності опублікованих матеріалів діючим вимогам
по оформленню звітності згідно Держстандарту України.

11 Завдання для самостійної роботи
надані у комплекті інструкційно-методичних матеріалів.

Інструкційну картку складено
викладачем Буряком Г.І.

Розглянуто та схвалено на засіданні
циклової комісії математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії
_____ Малик О.М.

Нехай n і m об'єми великих ($n > 30, m > 30$) незалежних вибірок, для яких знайдені відповідні вибіркові середні $\bar{x}$ та $\bar{y}$. Генеральні дисперсії $D(X), D(Y)$ відомі.

Правило 1. Для того, щоб при заданому рівні значимості перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ про рівність математичних сподівань (генеральних середніх) двох нормальних генеральних сукупностей з відомими дисперсіями (у випадку великих вибірок) при конкуруючій гіпотезі $H_1: M(X) \neq M(Y)$, потрібно порахувати спостережуване значення критерію

$$K_{\text{сп}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}},$$

і по таблиці функції Лапласа знайти критичну точку $k_{\text{кр}}$ з рівності

$$\Phi(k_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Якщо $|K_{\text{сп}}| < k_{\text{кр}}$ – нема підстави відкидати нульову гіпотезу.

Якщо $|K_{\text{сп}}| > k_{\text{кр}}$ - нульова гіпотеза відкидається.

Правило 2. При конкуруючій гіпотезі $H_1: M(X) > M(Y)$ знаходять критичну точку $k_{\text{кр}}$ по таблиці з рівності

$$\Phi(k_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}.$$

Якщо $K_{\text{сп}} < k_{\text{кр}}$ - нема підстави відкидати нульову гіпотезу.

Якщо ж $K_{\text{сп}} > k_{\text{кр}}$ - нульова гіпотеза відкидається.

Правило 3. При конкуруючій гіпотезі $H_1: M(X) < M(Y)$ знаходять точку $k_{\text{кр}}$ за правилом 2.

Якщо $K_{\text{сп}} > -k_{\text{кр}}$ - нульова гіпотеза приймається.

Якщо $K_{\text{сп}} < -k_{\text{кр}}$ - нульова гіпотеза відкидається.

Приклад 1

За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n = 60, m = 50$, вибраних з нормальних генеральних сукупностей, знайдено вибіркові середні $\bar{x} = 1250, \bar{y} = 1275$. Генеральні дисперсії відомі $D(X) = 120, D(Y) = 100$. Потрібно при рівні значимості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ при альтернативній $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання.

Знайдемо спостережуване значення критерію

$$K_{\text{сп}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} - \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{1250 - 1275}{\sqrt{\frac{120}{60} - \frac{100}{50}}} = -12,5$$

Так як $H_1: M(X) \neq M(Y)$, то критична область - двостороння. Знайдемо праву критичну точку з рівності

$$\Phi(k_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 - 0,01}{2} = 0,495$$

По таблиці функції Лапласа знаходимо $k_{\text{кр}} = 2,58$.

Так як $|K_{\text{сп}}| > k_{\text{кр}}$, то нульова гіпотеза відкидається, тобто генеральні середні різняться суттєво.

Приклад 2

За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n = 10, m = 10$, вибраних з нормальних генеральних сукупностей, знайдено вибіркові середні $\bar{x} = 14,3, \bar{y} = 12,2$. Генеральні дисперсії відомі $D(X) = 22, D(Y) = 18$. Потрібно при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ при альтернативній $H_1: M(X) > M(Y)$.

Розв'язання.

Знайдемо спостережуване значення критерію

$$K_{\text{сп}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} - \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{14,3 - 12,2}{\sqrt{\frac{22}{10} - \frac{18}{10}}} = 1,05$$

Так як $H_1: M(X) > M(Y)$, то критична область - правостороння.

По таблиці функції Лапласа знаходимо $k_{\text{кр}} = 1,64$.

Так як $K_{\text{сп}} < k_{\text{кр}}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто генеральні середні різняться несуттєво.

Приклад 3

За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n = 50, m = 50$, вибраних з нормальних генеральних сукупностей, знайдено вибіркові середні $\bar{x} = 142, \bar{y} = 150$. Генеральні дисперсії відомі $D(X) = 28,2, D(Y) = 22,8$. Потрібно при рівні значимості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(X) = M(Y)$ при альтернативній $H_1: M(X) < M(Y)$.

Розв'язання.

Знайдемо спостережуване значення критерію

$$K_{\text{сп}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} - \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{142 - 150}{\sqrt{\frac{28,2}{50} - \frac{22,8}{50}}} = -8$$

Так як $H_1: M(X) < M(Y)$, то критична область - лівостороння. Знайдемо критичну точку $k_{\text{кр}}$ з рівності

$$\Phi(k_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0,01}{2} = 0,49.$$

По таблиці функції Лапласа знаходимо $k_{\text{кр}} = 2,33$. Тоді $-k_{\text{кр}} = -2,33$

Так як $K_{\text{сп}} < -k_{\text{кр}}$, то нульова гіпотеза відкидається, тобто вибіркова середня $\bar{x}$ значно менше вибіркової середньої $\bar{y}$.